Математика **Л-230911** **02.03.2024**

Урок №102

Тема: Понятие об определенном интеграле как площади криволинейной трапеции

Срок сдачи до 03.03.2024

Теоретическая часть:

Рассмотрите примеры решения определенных интегралов

Пример 1

Вычислим $\int_0^1 x^2\,dx$

Первообразная для функции $f(x)=x^2$ есть функция $F(x)=\frac{x^3}{3}$.

Тогда $\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}$.

№1

а) $\int_{\frac{-2}{3}}^{1} x^3\,dx$; б) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$

а) $\int_{\frac{-2}{3}}^{1} x^3\,dx=\frac{x^4}{4}=\frac{1^4}{4}-\frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^4}{4}=\frac{65}{324}$;

б) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}=\frac{-1}{x}=\frac{-1}{3}-\left(\frac{-1}{1}\right)=\frac{2}{3}$

Пример 2

Вычислим $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

Первообразная для функции $f(x)=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ (формула понижения степени) есть функция $F(x)=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$.

Тогда $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx=\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sin\pi}{4}\right)-\left(\frac{0}{2}-\frac{\sin 0}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$.

№2

а) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$

а) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx=\sin x\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)=2$;

б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-ctg\frac{\pi}{2}-\left(-ctg\frac{\pi}{4}\right)=1$

Пример 3

Вычислим $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2+\cos x\right) dx$

Сначала найдем неопределенный интеграл $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2+\cos x\right) dx=\frac{x^3}{3}+\sin x$

затем определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2+\cos x\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+sinx\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+\sin\frac{\pi}{2}-\left(\frac{0^3}{3}+\sin 0\right)^0=\frac{\pi^3}{24}+1$

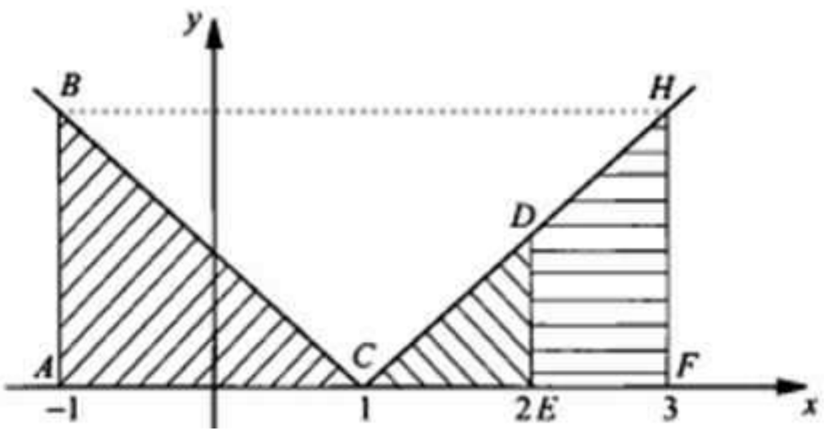
Очень часто при вычислении определенных интегралов полезно использовать их геометрический смысл - площадь соответствующей криволинейной трапеции.

Пример 4

Используя геометрический смысл интеграла, вычислим:

$\int_{-1}^{2}|x-1|dx$;

$\int_{2}^{3}|x-1|dx$;



Построим график подынтегральной функции $f(x)=|x-1|$.

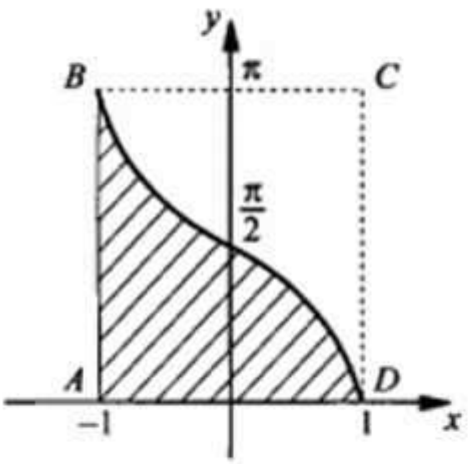
а) Видно, что значение данного интеграла равно площади многоугольника ABCDE, состоящего из двух прямоугольных равнобедренных треугольников:

ABC (AB = AC = 2) и CDE (CE = ED = 1). Тогда $\int_{-1}^{2}|x-1|dx=\frac{1}{2}AB\cdot AC+\frac{1}{2}CE\cdot DE=\frac{1}{2}2\cdot 2+\frac{1}{2}1\cdot 1=2+\frac{1}{2}=¿$ 2,5.

б) Значение данного интеграла равно площади трапеции EDHF с основаниями ED = 1 и HF = 2 и высотой EF = 1. Поэтому $\int_{2}^{3}|x-1|dx\frac{ED+HF}{2}\cdot EF=\frac{1+2}{2}\cdot 1=1,5$.

Пример 5Используя геометрический смысл интеграла, вычислим $\int_{-1}^{1}arccosxdx$.

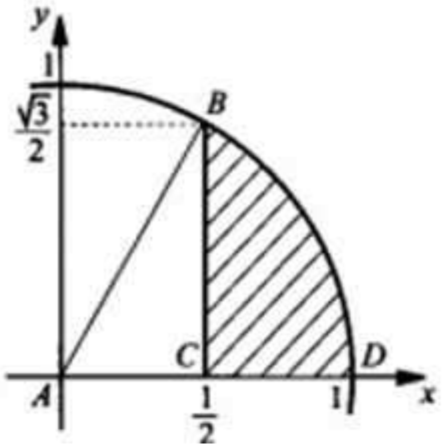
Построим график подынтегральной функции $f(x)=arccosx$. Также построим прямоугольник ABCD и измерениями AD = 2 и AB $=\pi$ и площадью $S=AD\cdot AB=2\pi$. Видно, что площадь криволинейной трапеции ABD составляет ровно половину площади прямоугольника ABCD. Поэтому $\int_{-1}^{1}arccosxdx=\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi$



Пример 6

Используя Геометрический смысл интеграла, вычислим:

а) $\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$; б) $\int_{0,5}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$.



Построим график подынтегральной функции $y=\sqrt{1-x^2}$. Очевидно, что $y \geq 0$. Возведем обе части равенства в квадрат: $y^2=1-x^2$ или $x^2+y^2=1$. Получили уравнение окружности с центром в начале координат и радиуса 1. Поэтому с учетом условия $y \geq 0$ графиком данной функции является верхняя полуокружность.

а) Значение данного интеграла равно площади четверти круга радиуса 1. Поэтому $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{4}\pi R^2=\frac{1}{4}\pi \cdot 1^2=\frac{\pi}{4}$.

б) Значение этого интеграла равно площади криволинейной трапеции BCD. Эта площадь равна разности площади сектора ABD (с углом $\frac{\pi}{3}$): $S_{ABD}=\frac{1}{2}R^2 \cdot \alpha=\frac{1}{2}1^2 \cdot \frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$ и площади прямоугольного треугольника ABC: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC \cdot BC=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$. Поэтому значение данного интеграла $\int_{0,5}^1 \sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Домашнее задание

1. Выполнить задание дифференцированное: 1-5 задания для обязательного выполнения, задания 6*-8* на дополнительную оценку

1	$\int_{0}^{2} 2e^{x} \partial x$	2	$\int_{-1}^{1} x^{-2} \partial x$	3	$\int_{0}^{2} \frac{5}{7} x^{4} \partial x$	4	$\int_{0}^{4} \frac{3}{\sqrt{x}} \partial x$
5	$\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{\partial x}{x^{5}}$	6*	$\int_{-2}^{3} (x^{3} - 3x) \partial x$	7*	$\int_{-1}^{0} (x^{3} + 2x) \partial x$	8*	$\int_{-2}^{3} (2x + 1) \partial x$